TEMA 1. ELECTROESTÁTICA.

La electroestática se ocupa del estudio de la interacción eléctrica entre partículas cargadas en reposo.

Ley de Coulomb.

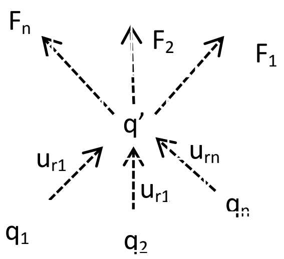
La interacción eléctrica entre dos partículas cargadas es proporcional a sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas y su dirección es la recta que los une.

$$F = Ke * q * \frac{q'}{r^2}$$
$$Ke \cong 9 * 10^9 * N * \frac{m^2}{C^2}$$
$$\varepsilon_0 : Permitividad\ del\ vacío$$
$$Ke = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0}$$
$$F = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q * q'}{r^2}$$

Campo eléctrico

Es cualquier región del espacio donde una carga eléctrica experimenta una fuerza que se debe a la presencia de otras cargas en dicha región.

Supongamos una distribución de cargas puntuales q_1, q_2,…,q_n fijas en el espacio y queremos conocer su efecto sobre otra carga q' situada en sus proximidades.



La fuerza que actúa sobre q' es:

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \cdots + \overline{F_n} =$$
$$\frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q_1 * q'}{r_1^2}\overline{u_{r1}} + \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q_2 * q'}{r_2^2}\overline{u_{r2}} + \cdots + \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q_n * q'}{r_n^2}\overline{u_{rn}} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q_i * q'}{r_i^2}\overline{u_{ri}}$$

Si dividimos F por q' vamos a obtener una magnitud vectorial

$$\frac{\overline{F}}{q'} = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2}\overline{u_{ri}}$$

que depende de la estructura del sistema de carga y de la posición del punto P(x,y,z) y que denominaremos campo eléctrico de una distribución de cargas en el punto P(x,y,z).

$$\overline{E} = \frac{\overline{F}}{q} \to \left(\frac{N}{C}\right)$$

Hemos definido un campo vectorial que puede ser visualizado mediante sus líneas de campo o sus líneas de fuerza, que tiene la propiedad de ser tangentes en cada punto al vector E(x,y,z) que le corresponde.

Distribución continua de carga

Una distribución continua se define por una función escalar llamada desigualdad de carga que es una función de la posición y que puede ser:

a) Densidad volumétrica de carga.

$$\rho = \frac{\partial q}{\partial v}$$

b) Densidad superficial de carga

$$\sigma = \frac{\partial q}{\partial s}$$

c) Densidad lineal de carga

$$\lambda = \frac{\partial q}{\partial l}$$

$$\overline{|E|} = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_1}{r_1} \rightarrow E = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} \int \frac{\partial q}{r^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \partial q = \rho \partial v \\ \partial q = \sigma \partial s \\ \partial q = \lambda \partial l \end{array}}$$

Potencial eléctrico

Una carga eléctrica colocada en un campo eléctrico está sometido a la fuerza de Coulomb que es una fuerza conservativa y que, por tanto, tiene asociada una energía potencial.

En cartesianos:

$$\left.\begin{array}{l} F_x = \frac{-\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \bar{F} = -\overline{grad}\, E_p = -V * E_p \\ \bar{F} = F_x * \overline{u_x} + F_y * \overline{u_y} + F_z * \overline{u_z} \\ \overline{grad} * E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} \overline{u_x} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \overline{u_y} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \overline{u_z} \end{array}$$

En polares:

$$F_r = \frac{-\partial E_p}{\partial r}$$

$$F_0 = -\frac{1}{r} * \frac{\partial E_p}{\partial \theta}$$

La fuerza es central ⬄ $\left\{\begin{array}{l} F = F_r \\ F_0 = 0 \rightarrow \frac{\partial r_p}{\partial \theta} = 0 \end{array}\right.$

$$Ep_n = E_p(1)$$

El potencial eléctrico en un punto se define como la energía potencial que tendría la carga unidad colocada en dicho punto.

Potencial

$$V = \frac{E_p}{q} \rightarrow \frac{T}{C} = V = Voltio$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = \frac{\bar{V} * E_p}{q} = -\bar{V}\left(\frac{Ep}{q}\right) = -\bar{V}Y = -\overline{grad}V$$

Y=V(x,y,z) es una función escalar. Vamos a relacionar el campo eléctrico E y el potencial V

En polares:

$$E = \frac{-\partial v}{\partial r}$$

La diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico es el trabajo que hay que realizar para transportar la unidad de carga positiva de un punto a otro.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \bar{E} * \delta r$$

Esta ecuación no define el valor absoluto del potencial, solo especifica diferencias, por tanto, se puede elegir un punto donde sea conveniente considerar que el potencial es 0.

En la mayoría de los casos conviene tomar el potencial cero en un punto infinitamente alejado de las cargas que crean el campo. Por tanto, V(r) tiene el siguiente significado físico:

"V(r) es la energía potencial que tendría la unidad de carga eléctrica si fuera trasladada al punto r considerada desde un cierto punto de referencia, por ejemplo, desde el infinito."

Ejemplo

Queremos probar que el potencial eléctrico correspondiente al campo magnético creado por una carga puntual es:

$$V = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q}{r}$$

El campo creado por una carga puntual

$$\left.\begin{array}{l} E = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q}{r^2} \\ E = \frac{-\partial v}{\partial r} \end{array}\right\} \quad \delta v = -E * \delta r$$

$$\delta v = -\frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q}{r^2}\, \delta r$$

$$\int_{V=0}^{V} \delta v = -\frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} \int_{r=\infty}^{r} \frac{q}{r^2} \delta r \ \ (\text{cuando } r=\infty, v=0)$$

$$V = -\frac{q}{4 * \pi * \varepsilon_0} \int r^{-2} \delta r = \frac{q}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{q}{4 * \pi * \varepsilon_0 * r}$$

$$V = \frac{q}{r} * \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0}$$

Vemos que el potencial es positivo o negativo dependiendo del signo de la carga que lo produce.

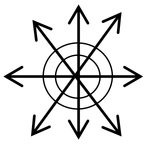
Si tenemos varias cargas puntuales, el potencial eléctrico en un punto P es la suma escalar de sus potenciales escalares

$$V = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q_2}{r_2} + \cdots + \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$

El potencial eléctrico correspondiente al campo creado por una distribución continua de cargas:

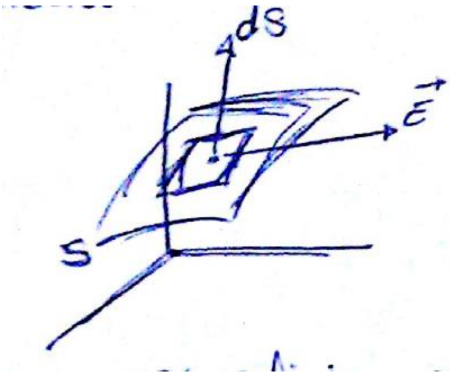
$$V = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} \int \frac{\delta q}{r}$$

La ecuación $V = \frac{1}{4*\pi*\varepsilon_0} * \frac{q}{r}$ indica que para una carga puntual las superficies equipotenciales son esferas de r=constante.



Líneas de fuerza y superficies equipotenciales del campo creado por una carga puntual positiva.

Ley de Gauss

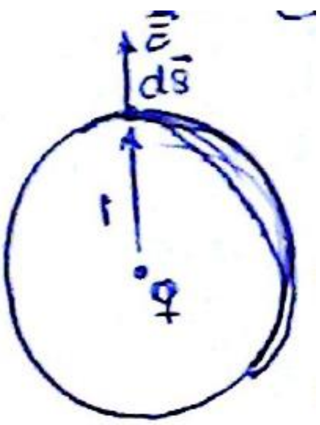


Flujo de un vector:
$\bar{E} = \bar{E}(x, y, z)$ es un campo vectorial.

$\delta\bar{s}$ es un elemento de superficie en el entorno del punto arbitrario P(x,y,z) y puede representarse mediante un vector. $\delta\bar{s} = \delta s * \overline{u_n}$

El flujo de $\bar{E}$ a través de la superficie S es: $[\emptyset = \int \bar{E}\delta\bar{s}]$ y representa el número de líneas vectoriales que atraviesan la superficie considerada.

-Flujo del campo eléctrico creado por una carga puntual q a través de una superficie esférica de centro q y radio r.



En un punto de la esfera el vector campo es de la forma $\frac{1}{4*\pi*\varepsilon_0} * \frac{q}{r^2}$ en la dirección del vector $\overline{u_r}$ y en ese punto $\delta\bar{s} = \delta\bar{s} * \overline{u_r}$ luego el flujo eléctrico se define como:

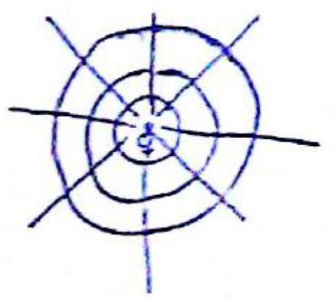
$$[\emptyset = \int_s \bar{E} * \delta\bar{s} = \int \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q}{r^2}\, \overline{u_r} * \delta\bar{s}\, \overline{u_n}$$

$$= \int \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q}{r^2}\, \delta\bar{s} = \frac{1}{4 * \pi * \varepsilon_0} * \frac{q}{r^2} \int_s \delta\bar{s}$$

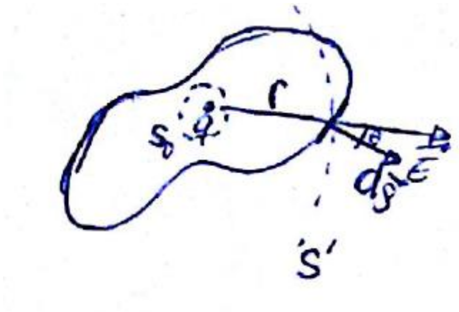
$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$

El flujo eléctrico a través de la esfera es proporcional a la carga e independiente del radio de la superficie esférica.

El flujo a través de varias esferas de radio r y centro q el flujo a través de todas ellas es el mismo.



Flujo a través de una superficie cerrada arbitraria que contiene una carga q:



$\emptyset_E = \int \bar{E} * \delta\bar{s} = \int \frac{1}{4*\pi*\varepsilon_0} * \frac{q}{r^2} \overline{u_r} * \delta\bar{s}$

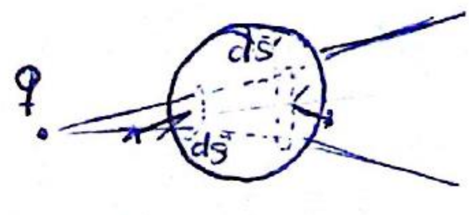
$\overline{u_r} * \delta\bar{s} = ds * cos\theta$ => $\int_S \frac{q}{4*\pi*\varepsilon_0*r^2} * \delta s * cos\theta$

Consideramos que $\delta\bar{s}$ es un elemento de superficie S' que es una superficie esférica centrada en q y que pasa por el punto p, por tanto $\delta s * cos\theta = \delta s'$

Vamos a considerar otra superficie esférica denominada S_0 con r_0 y contenida dentro de la superficie S.

$S_0 = 4 * \pi * r_0^2$ y $S' = 4 * \pi * r^2$ podemos decir que $\frac{\partial S'}{\partial S_0} = \frac{r^2}{r_0^2} \rightarrow \partial S' = \frac{r^2}{r_0^2} \partial S_0$ y por lo tanto $\emptyset = \int \frac{1}{4*\pi*\varepsilon_0} * \frac{q}{\cancel{r^2}} * \frac{\cancel{r^2}}{r_0^2} \partial S_0 = \int \frac{1}{4*\pi*\varepsilon_0} * \frac{q}{r_0^2} \partial S_0$ y basándonos en la demonstración anterior se llega que: $\emptyset_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Flujo a través de una superficie cerrada del campo eléctrico creado por una carga exterior a la superficie es nulo.



Si una carga tal como que esta fuera de una superficie cerrada, el flujo eléctrico es cero ($\emptyset = 0$) por que el flujo entrante es igual al flujo saliente pero de signo contrario luego el flujo neto es nulo.

Flujo a través de una superficie cerrada que contiene varias cargas (q_1,q_2,…,q_n)

$$\emptyset = \int_S \bar{E} * \delta\bar{s} = \int (\overline{E_1} + \overline{E_2} + \cdots + \overline{E_n})\delta\bar{s} = \int (E_1\delta\bar{s}) + \cdots + (E_n\delta\bar{s}) = \emptyset_{E1} + \emptyset_{E2} + \cdots + \emptyset_{E3}$$
$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \cdots + \frac{q_n}{\varepsilon_0} = \frac{q_{TOTAL}}{\varepsilon_0}$$

Conductores en equilibrio electroestático

-Aisladores y conductores.
-Conductor situado en un campo eléctrico.
-Campo eléctrico en las proximidades de un conductor.

Aisladores y conductores

La estructura de un metal puede considerarse formada por un conjunto de iones positivos fuertemente empaquetados y rodeados por un cierto número de electrones libres que forman una especie de fluido electrónico y que pueden moverse con facilidad a través de todo el metal.

Debido a esa gran cantidad de los electrones las cargas eléctricas que se producen en una parte del cuerpo se transmite inmediatamente a todo. En un conductor cargado los electrones se desplazaran hacia posiciones de equilibrio mientras que en un aislador las cargas están localizadas y cualquier distribución inicial permanecerá casi indefinidamente.

<u>Conductor situado en un campo eléctrico</u>
Si tenemos un conductor y le aplicamos un campo eléctrico cada electrón libre se ve sometido a una fuerza ($\bar{F} = q_e * \bar{E}$), entonces aparece un nuevo movimiento de los electrones libres, es decir, los electrones se mueven en conjunto con una cierta velocidad de arrastre que es mucho menor que la anterior velocidad media de cada electrón.

Este movimiento de arrastre constituye la corriente eléctrica.

El campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo, ya que si no lo fuese actuaría sobre los electrones libres y estos se desplazarán en su conjunto perdiendo la situación de equilibrio.

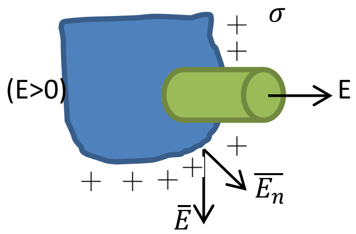
Al cargar un conductor se mueven los electrones de tal modo que al cabo de poco tiempo se disponen de manera que el campo eléctrico sea nulo en el interior del conductor.

En un conductor cargado en equilibrio la carga se encuentra en la superficie de conductor.

$$\left.\begin{array}{l}\bar{E} = 0 \\ \bar{E} = -\nabla * V\end{array}\right\} \quad \nabla * V = 0 \qquad (V = cte)$$

El potencial tiene el mismo valor en todos los puntos del conductor, es equipotencial y su superficie es una superficie equipotencial.

Campo eléctrico en las proximidades de un conductor



El campo eléctrico es normal a la superficie del conductor porque si no lo fuese su componente tangencial E_T pondría en movimiento a las cargas que hay en la superficie del conductor y se perdería la situación electroestática.

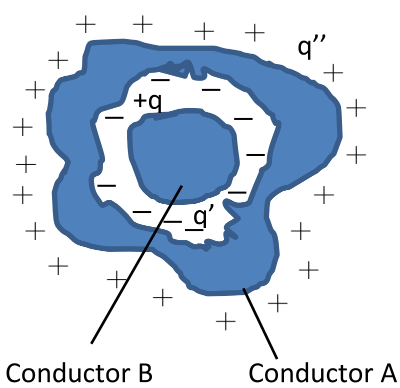
El flujo del campo eléctrico dentro de la superficie gaussiana es:

$$\oint \bar{E} * \delta\bar{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E * S = \frac{\sigma * S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Carga por inducción



El conductor A es un conductor hueco sin carga que contiene en su interior un conductor B cargado con una carga +q.

Vamos a ver que la carga +q de B produce en el conductor A una modificación en la repartición de sus cargas. En efecto, los electrones libres del conductor A son atraídos por las cargas positivas de B y se reparte sobre la superficie interna de A.

Vamos a ver que q’=q. Tenemos una superficie gaussiana en el interior de A y aplicamos la ley de Gauss.

$$\oint \underbrace{\bar{E} * \delta \bar{s}}_{0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \; => Q = 0$$

$$\underbrace{Q}_{0} = q + q' => \; -q$$

La superficie externa del conductor A ha quedado cargada positivamente.

q’’ = q ya que q’’ + q’ = 0 (principio de conservación de la carga) -> q’’=-q’=q

Capacidad de un conductor y condensadores

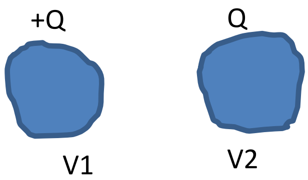
La capacidad de un conductor aislado se define como el cociente de su carga y de su potencial.

$$C = \frac{Q}{V}$$

La unidad de capacidad es el Faradio, que se define como la capacidad de un conductor aislado cuyo potencial eléctrico después de recibir una carga de 1 Culombio es de 1 Voltio, por tanto:

$$1F = \frac{1C}{1V}$$

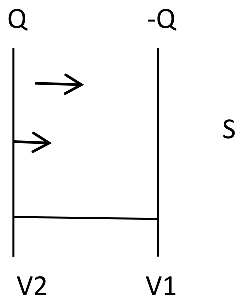
Condensadores



Dos conductores con cargas +q y -1 separadas en 1 medio cualquiera constituyen un condensador, los dos condensadores se llaman armaduras del condensador

$$C = \frac{Q}{V1 - V2}$$

Condensador plano



Está formado por dos conductores planos y paralelos separados una distancia d. (S=superficie de cada armadura).

$$C = \frac{Q}{V1 - V2}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \int_1^2 \partial v = -\int_1^2 E * \partial x$$

$$V2 - V1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} * (x_2 - x_1) \rightarrow V1 - V2 = \frac{\sigma * d}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{V1 - V2} = \frac{Q}{\frac{\theta * d}{\varepsilon_0}} = \left(\sigma = \frac{Q}{s}\right) = \frac{Q * \varepsilon_0}{\frac{Q}{s} * d} = \; \varepsilon_0 * \frac{S}{d}$$

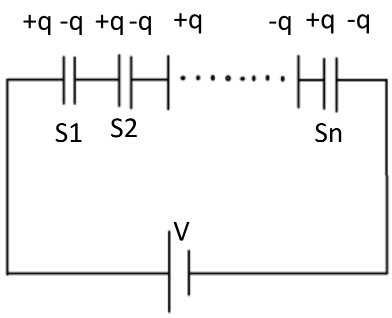
La capacidad es inversamente proporcional a la distancia de las armaduras. Depende de la geometría del condensador.

Asociación de condensadores

En serie: la conexión se efectúa uniendo la placa positiva de un condensador con la negativa del siguiente y así sucesivamente.

En paralelo: cuando se unen a un polo del generador las placas del mismo signo de todos los condensadores y todas las del otro signo al otro polo.

Capacidad equivalente de n condensadores conectados en serie



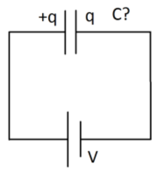
Si entre los extremos del primer y último condensador aplicamos una diferencia de potencial V esta se repartirá por todos los condensadores.

La armadura izquierda del primer condensador adquiere, por ejemplo, la carga +q.

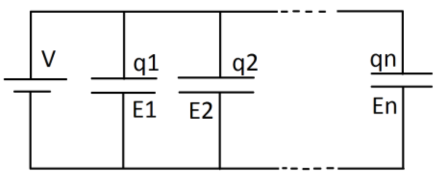
Por inducción aparecerá en la armadura derecha del mismo condensador una carga –q quedando libre una carga +q que se almacena en la armadura izquierda del segundo condensador ya que las dos placas conectadas entre sí constituye un conductor aislado equipotencial pero de carga total nula, y así sucesivamente con los demás condensadores en serie.

Cada condensador almacena la misma carga sea cual sea el valor de su capacidad y el potencial entre sus placas es $V_i = \frac{Q}{C_i}$

$$\left.\begin{array}{l} V = V_1 + V_n = \frac{q}{C_1} + \cdots + \frac{q}{C_n} \\ V = \frac{q}{C} \end{array}\right\} \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$



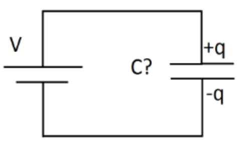
Asociación de condensadores en paralelo



La diferencia de potencial entre las placas de cada condensador es la misma (V=V1=V2=…=Vn) y la carga se reparte entre todos los condensadores.

$$\left.\begin{array}{l} q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = V * C_1 + V * C_2 + \cdots + V * C_n = V(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \\ q = V * C \end{array}\right\}$$

$$\Big\} V(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) = V + C(C = \textstyle\sum_{i=1}^{n} C_n)$$



Para calcular la capacidad C de un único condensador que fuese equivalente al conjunto de los n condensadores conectados en paralelo.

Energía de un conductor aislado y un condensador

Supongamos que estamos realizando el proceso de carga de un conductor y que en un isntante de tiempo vamos a añadirle un δq.

Para ello hay que realizar un trabajo para vencer la fuerza de repulsión de las cargas ya presentes en el conductor.

Si el conductor tiene una capacidad C y una carga Q su potencial es

$$V' = \frac{q}{C}$$

Si añadimos una carga δq al conductor trayéndola desde el infinito el trabajo realizado es

$$\delta w \text{ (trabajo efectuado para añadir δq al conductor)} = V' * \delta q = \frac{q}{C} * \delta q$$
$$= \delta u \text{(incremento en la energía del conductor)}$$
$$U\text{(energía de un conductor cargado con una carga q)} = \int_0^Q \frac{q}{C} * \delta q = \frac{1}{C} * \frac{q^2}{2} \begin{cases} Q \\ 0 \end{cases} = \frac{Q^2}{2 * C}$$
$$= Q^2 * \frac{C}{2 * C^2} = \left(V = \frac{Q}{C}\right) = \frac{1}{2} * C * V^2$$

Análogamente para un condensador:

$$U = \frac{Q^2}{2 * C} = \frac{1}{2} * C * (V1 - V2)^2$$